

Dalla geometria euclidea alla geometria frattale: un ipermedia per interpretare la Natura, l'Universo e l'Uomo stesso

Sandro Gallea¹, Roberto Gallea²

¹ITCS "Liberio Grassi" di Palermo

²DINFO – Dipartimento di Ingegneria Informatica – Università di Palermo
{sandrogallea,robertogallea}@unipa.it

Viene presentato un percorso didattico interdisciplinare sviluppato in una terza classe dell'ITCS "Liberio Grassi" di Palermo. Tale percorso, attraversando la geometria euclidea e le geometrie ellittica ed iperbolica, giunge all'esame della geometria dei frattali. Viene mostrato agli alunni che tali oggetti possono essere utilizzati come validi strumenti per la comprensione di molti fenomeni naturali, come il percorso compiuto dai fulmini, il modo di svilupparsi degli alberi, il percorso dei fiumi, il profilo delle catene montuose e delle coste, lo sviluppo dei vasi sanguigni, il sistema nervoso o fenomeni economici come la variazione dei prezzi. Gli alunni hanno utilizzato, per la generazione e la visualizzazione degli oggetti frattali, il software free ChaosPro. Al termine dell'attività le conoscenze acquisite hanno consentito agli alunni la realizzazione di un ipermedia creato con un software di presentazione.

1. Introduzione

La necessità di utilizzare nella didattica percorsi interdisciplinari, che integrino cioè concetti e conoscenze sviluppati nell'ambito di più discipline, è ormai un'esigenza sentita dalla maggior parte dei docenti italiani; non in ugual misura è stata invece accettata l'idea dell'utilizzo delle Nuove Tecnologie nella didattica comune, anche se è in continuo aumento il numero dei docenti che ne fa uso per il miglioramento dei processi di insegnamento-apprendimento [Manzelli 2002]. Entrando nello specifico delle discipline, si ritiene necessario mostrare agli alunni che la matematica, spesso vista come disciplina teorica a sé stante o al massimo collegata a discipline come la fisica, la topografia, l'economia, è in realtà in strettissima relazione con la filosofia, il mondo dell'arte e la stessa natura di cui spesso risulta essere la chiave di interpretazione e comprensione. Non a caso molti filosofi erano essi stessi insigni matematici come ad esempio Pitagora, Eratostene, Democrito, Talete, Aristotele, Platone, Galileo, Cusano, Cartesio, Pascal, Leibiniz, Newton, Husserl.

Il progetto descrive come i temi della geometria euclidea, delle geometrie non euclidee (ellittica ed iperbolica) e della geometria frattale, siano stati affrontati, in un contesto scolastico, mediante l'utilizzo delle tecnologie multimediali. Vengono inoltre messi in evidenza i legami tra i frattali e l'architettura, l'arte, la vita quotidiana, la natura e l'uomo stesso.

Il contributo è articolato come segue: nella sez.2 vengono passate in rapida rassegna le geometrie euclidee e non euclidee, introdotti gli oggetti frattali, presentate le loro caratteristiche ed evidenziata l'importanza che, nello sviluppo della geometria frattale, ha avuto Benoit Mandelbrot [Mandelbrot 2000]; nella sez.3 vengono sinteticamente descritte le differenti fasi dell'attività; nella sez.4, viene brevemente presentato il software ChaosPro e il suo utilizzo nel corso dell'attività didattica; nella sez.5 vengono illustrate le caratteristiche dell'ipermedia prodotto dagli alunni; nella sez.6 vengono riepilogati i risultati conseguiti per mezzo dell'attività, la valutazione dell'intervento formativo da parte degli alunni effettuata attraverso un test di gradimento, la valutazione delle conoscenze acquisite dagli alunni compiuta attraverso la somministrazione di un test e le relative considerazioni; infine nella sez.7 vengono presentate le conclusioni e delineati gli sviluppi futuri dell'attività.

2. Dalla geometria euclidea alle geometrie non euclidee ellittica ed iperbolica

2.1. La geometria euclidea e i suoi postulati

La geometria euclidea è quella branca della Matematica che studia le forme nel piano e nello spazio e le loro mutue relazioni. Le sue origini risalgono al 2000 a.C. Gli Egiziani utilizzavano elementi di geometria per la costruzione delle piramidi, ma anche per la misurazione dei campi dopo le inondazioni del Nilo. Lo sviluppo della geometria in modo scientifico è dovuto ai greci che utilizzarono la nuova mentalità creata dalla filosofia per portare la geometria dal piano pratico a quello speculativo attraverso un procedimento logico-deduttivo codificato per la prima volta da Euclide di Alessandria nel III secolo a.C. Tale procedimento partendo dagli assiomi e dai concetti primitivi come il punto, la retta ed il piano, porta attraverso un procedimento logico-deduttivo, alla dimostrazione di teoremi.

I postulati della geometria euclidea

- Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
- Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente.
- Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
- Tutti gli angoli retti sono uguali.
- Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due retti.

2.2. Le geometrie non euclidee

Lo stesso Euclide, mentre riteneva evidenti i primi quattro postulati della sua geometria, non considerava altrettanto evidente il quinto detto “delle rette parallele”, infatti questo postulato non rimanda ad alcuna costruzione geometrica che possa limitarsi sempre ad una porzione finita di piano. Vani sono stati i tentativi, fatti sino ad oggi dai matematici, di dimostrare, riformulare o sostituire il quinto postulato. Alcuni studiosi come Gauss, Bolyai, Lobabacevskij, Riemann nei primi del XIX secolo, hanno costruito delle geometrie che, negando il quinto postulato, hanno dato vita alle geometrie dette non euclidee come ad esempio la *geometria ellittica* o la *geometria iperbolica* (Fig.1).

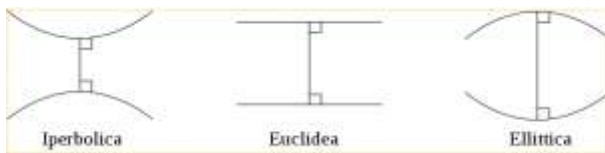


Fig. 1: Due rette aventi una perpendicolare in comune nelle tre geometrie

Nella geometria iperbolica le rette divergono, ed è quindi possibile trovare molte rette parallele (cioè che non si intersecano). Nella geometria ellittica le rette convergono e quindi non esistono rette parallele.

2.3. La geometria frattale, gli oggetti frattali e le loro caratteristiche

La geometria del caos o geometria frattale è nata nei primi anni del ventesimo secolo ad opera di Gaston Julia (1893-1978), ed è stata studiata, ma sempre in modo teorico ed astratto, dai matematici George Cantor (1895-1919), Giuseppe Peano (1858-1932), David Hilbert (1862-1943) e Helge von Kock (1870-1924), ma è solo grazie a Benoit Mandelbrot, il quale utilizzò per la visualizzazione degli oggetti frattali il calcolatore, strumento che nel frattempo si andava sempre più diffondendo grazie agli sviluppi della tecnologia, che tale geometria è divenuta un mezzo di interpretazione della realtà e della natura. È proprio Mandelbrot a coniare il termine “*Frattale*” che deriva, come lui stesso ebbe a dire, dal latino *fractus* che ha il significato di irregolare, interrotto, frammentato. Attraverso l’uso della Geometria Frattale [Mandelbrot 1990, 2000] è possibile interpretare e comprendere alcuni fenomeni naturali come il percorso compiuto dai fulmini e dei fiumi, il modo di svilupparsi degli alberi, il profilo delle catene montuose e delle coste, lo sviluppo dei vasi sanguigni, del cervello, del sistema nervoso, del feto, etc.

2.3.1. Caratteristiche di un oggetto frattale. Alcuni esempi di oggetti frattali

La principale caratteristica di un oggetto frattale è l’autosomiglianza o autosimilitudine. Tale proprietà consiste nel fatto che la forma di un oggetto presenta le stesse caratteristiche globali qualunque sia la scala di

Dalla geometria euclidea alla geometria frattale: un ipermedia per interpretare la Natura, l'Universo e l'Uomo stesso

osservazione. Tale proprietà fu spiegata da Mandelbrot attraverso il concetto di *omotetia interna*, una forma più generale del concetto di omotetia già noto ai matematici, per cui un vettore nel piano tramite una omotetia viene trasformato in un altro vettore avente la stessa direzione, lo stesso verso, ma modulo moltiplicato per un fattore che prende il nome di "rapporto di omotetia". Secondo la generalizzazione introdotta da Mandelbrot le trasformazioni possono essere anche di natura diversa: rotazioni, traslazioni, simmetrie assiali, contrazioni. Un oggetto frattale non è generato da un'equazione, ma da un algoritmo iterativo. Di seguito vengono riportati gli schemi di costruzione di alcuni semplici e basilari oggetti frattali: l'insieme di Cantor, il Triangolo di Sierpinski, la curva di Koch e l'insieme di Julia.

Insieme di Cantor	Triangolo di Sierpinsky	Curva di Koch	Insieme di Julia	Insieme di Mandelbrot
-Si parte da un oggetto di lunghezza L -Si divide il segmento in n tre parti uguali -Si elimina la parte centrale -Si itera il procedimento su ogni segmento che rimane, all'infinito	-Si parte da un triangolo equilatero pieno -Si elimina la parte interna ottenuta congiungendo i punti medi dei lati ottenendo tre triangoli uguali, ciascuno di superficie ¼ del triangolo originario -Si itera il procedimento, su ciascuno dei triangoli ottenuti, all'infinito.	-Si parte da un segmento di lunghezza L -Si divide in tre parti uguali -Si sostituisce la parte centrale con una cuspidata formata da altri due segmenti di lunghezza L/3 -Si itera il procedimento, su ogni segmento, all'infinito.	-Si consideri la famiglia di funzioni $F_c(z)=z^2+c \quad (1)$ -Essendo $c=a+ib$, con a e b numeri reali e $i=\sqrt{-1}$ unità immaginaria. -Al variare del parametro c si ottengono diversi insiemi Julia.	Si costruisce la successione dei numeri complessi $c=a+ib$ in modo ricorsivo secondo le equazioni: $\begin{cases} z_1 = c_1 \\ z_2 = z_1 + c_1 \\ \dots\dots\dots \\ z_{n+1} = z_n + c_1 \end{cases} \quad (2)$ A tali numeri corrispondono i punti P del piano di coordinate (a,b) .

Tabella 1: Schema di costruzione dei principali oggetti frattali

3. Organizzazione del lavoro

La maggior parte del lavoro è stato svolto a scuola nell'aula scolastica e nel laboratorio d'informatica; una parte dell'attività è stata svolta a casa dagli alunni che hanno la disponibilità dello strumento informatico e del collegamento a Internet (la quasi totalità).

Le fasi di attuazione del progetto possono così riassumersi:

- Presentazione degli argomenti
- Ricerca guidata in classe su Internet
- Ricerca autonoma su Internet nel laboratorio informatico e raccolta del materiale in modo individuale
- Selezione del materiale reperito
- Studio e utilizzo del programma ChaosPro per la creazione di oggetti frattali

- Progetto dell'Ipermedia
- Realizzazione dell'ipermedia con Power Point
- Revisione del lavoro
- Visione da parte degli alunni del lavoro finale

4. Il software ChaosPro e suo utilizzo nell'attività didattica

ChaosPro [ChaosPro] è un software free che consente di generare e visualizzare oggetti frattali, sia in due che in tre dimensioni. ChaosPro può inoltre effettuare operazioni quali lo zoom sugli oggetti generati, semplici animazioni, modificare l'angolo di incidenza della luce sull'oggetto, cambiarne il colore, etc.

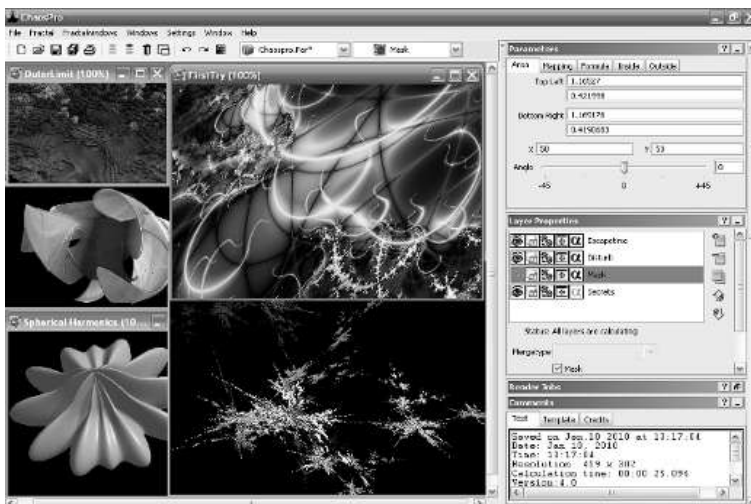


Fig. 2 - L'interfaccia del software free ChaosPro

Attraverso l'utilizzo del software ChaosPro (Fig.2) gli alunni, guidati dal docente, hanno imparato a generare e visualizzare alcuni oggetti frattali e, con loro grande stupore, hanno constatato come gli oggetti creati utilizzando formule matematiche, avessero un grande somiglianza con gli oggetti reali presenti nella Natura. A titolo di esempio si confrontino le immagini delle Fig. 3.

Dalla geometria euclidea alla geometria frattale: un ipermedia per interpretare la Natura, l'Universo e l'Uomo stesso

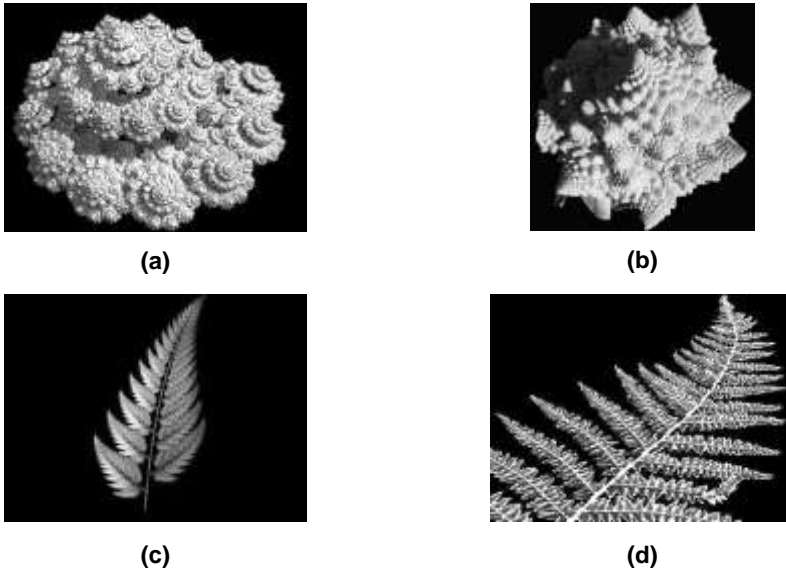


Fig. 3 - Oggetti frattali sintetici e naturali a confronto: broccolo (a-b), felce (c-d)

5. Il prodotto finale

Il prodotto finale dell'attività svolta è stato un ipermedia realizzato con Power Point, la cui homepage è mostrata in Fig.4 . Nell'ipermedia, dopo una breve introduzione alle geometrie euclidee e non, sono presentati, anche attraverso filmati, gif animate e immagini, la Geometria Frattale, Benoit Mandelbrot, gli oggetti frattali e le loro caratteristiche e i sorprendenti legami che tali oggetti hanno con l'Architettura, l'Arte [Busiello 2000], La Natura e l'Uomo stesso [Sala e Cappellato 2003]. Nella Fig.5 sono mostrate alcune pagine dell'ipermedia.



Fig. 4: la homepage dell'ipermedia



Fig. 5: alcune pagine dell'ipermedia

6. Risultati dell'intervento, valutazioni da parte degli alunni sull'intervento formativo, risultati test valutazione alunni e relative considerazioni

All'attività didattica, iniziata il 29 settembre 2009 e conclusa il 15 Dicembre 2009 per complessive 21 ore di attività, hanno partecipato 17 alunni. Il progetto, benché di tipo curriculare e pur trattando di "matematica", ha suscitato l'interesse degli alunni che hanno partecipato attivamente alla sua realizzazione. L'introduzione degli argomenti ha avuto un peso notevolissimo nello sviluppo dell'intero progetto, perché ha prodotto un effetto quasi dirompente ed ha creato nei ragazzi quel mistero, quella curiosità, quel desiderio di sapere che sono le molle fondamentali in qualsiasi processo di apprendimento sia di tipo pedagogico che andragogico.

Nel corso dell'attività gli alunni hanno imparato a: utilizzare in modo proficuo i motori di ricerca, avvalendosi in modo opportuno delle parole chiave; verificare la provenienza delle informazioni reperite, distinguendo i siti ufficiali (Università, Associazioni Culturali, Enti Pubblici ecc.) dai siti gestiti ad esempio da studenti o da privati cittadini; verificare sempre le informazioni trovate effettuando ad esempio confronti tra differenti fonti; effettuare la sintesi e la rielaborazione delle informazioni e non semplici copia-incolla; conoscere il significato di ipermedia; progettarne e realizzarne uno; conoscere il concetto intuitivo di limite di una funzione; usare Windows Movie Maker per il montaggio di un video composto

Dalla geometria euclidea alla geometria frattale: un ipermedia per interpretare la Natura, l'Universo e l'Uomo stesso

da diversi video scaricati da Youtube; creare gif animate con il programma Gimp; usare il programma ChaosPro. Hanno inoltre approfondito la conoscenza di Power Point imparando ad usare tale applicativo per la creazione di un ipermedia e l'uso di Excel realizzando un foglio di calcolo per il calcolo della lunghezza della curva di Koch di lunghezza L iniziale al progredire del suo stato di generazione corrente,

Alla fine dell'attività sono stati somministrati agli alunni un questionario di gradimento dell'attività formativa ed un test di valutazione didattico. I risultati ottenuti sono mostrati nella tabella 1 e 2.

Test di valutazione dell'azione formativa da parte degli alunni		
Domande	Risultati	
Assegna un voto da 1 a 10 all'argomento scelto per lo sviluppo di questa attività didattica.	Voto 10	12 %
	Voto 9	47%
	Voto 8	29%
	Voto 7	12 %
Assegna un voto da 1 a 10 al programma ChaosPro tenendo conto di: completezza e semplicità del tutorial, interfaccia, facilità d'uso del programma, risultati ottenibili, potenzialità.	Voto 10	6%
	Voto 9	23 %
	Voto 8	59 %
	Voto 7	12 %
Da 1 a 10 quanto sei soddisfatto del lavoro finale prodotto?	Voto 10	41%
	Voto 9	53%
	Voto 8	6%
Assegna un voto da 1 a 10 considerando tutti gli aspetti dell'esperienza didattica sulla Geometria frattale appena conclusa.	Voto 10	6%
	Voto 9	12%
	Voto 8	82%
Rifaresti questo tipo di esperienza utilizzando argomenti differenti?	Si	88%
	No	0%
	Forse	12%
Esprimi con una frase il tuo giudizio sull'esperienza.		
1. Non mi sembrava di studiare e studiare addirittura matematica		
2. Spero di fare un'esperienza analoga in altre discipline		
3. Anch'io "Non guarderò più le nuvole con gli stessi occhi"		
4. Mandelbrot the best		

Tabella 2: risultati dei test di valutazione dell'attività da parte degli alunni

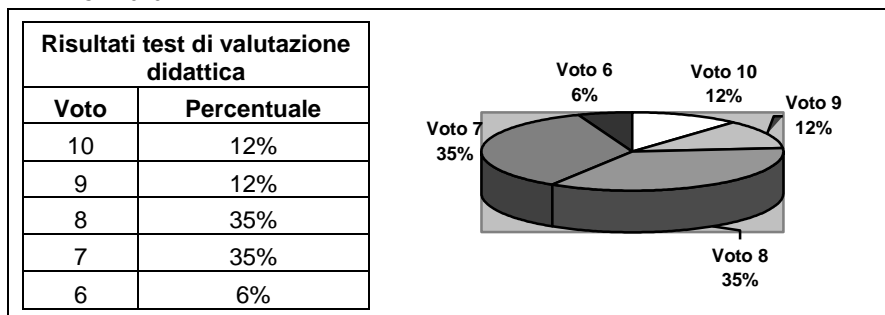


Fig. 6: Risultati test di valutazione didattica

7. Conclusioni e sviluppi futuri

Tutti gli obiettivi sono stati raggiunti per la totalità degli allievi, sia quelli di tipo disciplinare che quelli di tipo trasversale; in particolare, anche gli alunni che normalmente sono restii all'impegno, si sono mostrati partecipi a tutte le attività con particolare riguardo a quelle laboratoriali. Tutte le modalità di insegnamento-apprendimento, opportunamente modulate, si sono rivelate proficue e funzionali al raggiungimento degli obiettivi prefissati. Il lavoro di gruppo ha coinvolto tutti i componenti, naturalmente a livelli differenti e secondo la capacità ed abilità di ciascuno. I ragazzi hanno valutato l'attività svolta in modo estremamente positivo, anche perché scaturita dalla collaborazione di tutti. Il lavoro prodotto sarà pubblicato sul sito web dell'Istituto. Si pensa di ripetere il tipo di attività il prossimo anno utilizzando come argomento la "Sezione aurea" o "Divina proporzione".

Bibliografia

- [Busiello 2000], Busiello S., Frattali e musica, Aracne, Roma, 2000
- [Mandelbrot 2000], Mandelbrot B., Gli oggetti frattali, Einaudi, Torino, 2000
- [Mandelbrot 1990], Mandelbrot B., La geometria della natura, Theoria, Roma, 1990
- [Mandelbrot 2005], Mandelbrot B., Nel Mondo dei frattali, Di Renzo Editore, Roma, 2005
- [Manzelli 2002], Manzelli P., Le nuove teorie della mente e le Nuove Tecnologie. PsicoLab rivista on-line, Firenze 2002
- [Sala e Cappellato 2003], Sala N., Cappellato G., Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura, Franco Angeli, Milano, 2003.
- [ChaosPro], ChaosPro, <http://www.chaospro.de>